

La Física de los Viajes en el Tiempo

*A la memoria de mi
padre, quien vive*

Autor: Javier Sanchez Sanchez

LA FÍSICA DE LOS VIAJES EN EL TIEMPO

Resumen

El principio de Covarianza General permite comprender la dinámica de los sistemas de referencia acelerados usando el formalismo de la Relatividad General. Usando este principio se deducen fácilmente la métrica, la conexión afín y las ecuaciones de la dinámica en un sistema de referencia acelerado, en ausencia de gravedad. Las ecuaciones obtenidas explican: la geometría de un espacio-tiempo sin gravedad, las diferencias entre gravedad e inercia y qué es y cómo se puede viajar en el tiempo. Estos resultados permiten resolver las ecuaciones relativistas de la dinámica de un fluido perfecto sin presión y en movimiento circular calculando la fuerza externa que hay que aplicar sobre este fluido para que retroceda en el tiempo. En el Apéndice se generaliza el formalismo para el caso en el que la gravedad esté presente.

INTRODUCCION

La invarianza de las ecuaciones de la Física ante transformaciones de Lorentz constituye uno de los pilares de la Física. Este principio determina la forma de las ecuaciones de la Física en los sistemas de referencia inerciales.

Tiene sentido que exista algún principio de invarianza más general que permita expresar las ecuaciones de la Física en cualquier sistema de referencia. Este es el principio de invarianza de las ecuaciones de la Física ante cualquier transformación de coordenadas implícito en el principio de Covarianza General.

En general, la invarianza ante transformaciones de Lorentz resulta satisfactoria cuando en las ecuaciones del campo no interviene la masa, como sucede en el electromagnetismo. Si la masa se encuentra presente, como en el caso de la dinámica o la gravedad, entonces resulta más adecuada la invarianza general.

El principio de Covarianza General de las ecuaciones de la Física es idóneo para encontrar las ecuaciones de la dinámica en sistemas de referencia acelerados, la métrica y la conexión afín en un espacio-tiempo sin gravedad. Su principal ventaja es que en las ecuaciones de la dinámica aparecen explícitas las transformaciones de coordenadas entre observadores en movimiento. Esto hace que partiendo de unas transformaciones de coordenadas conocidas se pueda determinar la dinámica del movimiento. Otra ventaja importante resulta de la igualdad entre gravedad e inercia que postuló Einstein en su Principio de Equivalencia de la Relatividad General. Como se puede intuir, es mucho más fácil manejar la inercia que aparece con el movimiento acelerado que la gravedad, aunque los efectos en ambos casos tienen que ser localmente equivalentes.

En este artículo se muestra el tratamiento de los sistemas de referencia en movimiento desde un punto de vista no cuántico y relativista y usando el formalismo de la Relatividad General.

Primeramente, en las secciones I a IV se considera el movimiento en un espacio-tiempo sin gravedad. En la sección I se estudian los sistemas de referencia en movimiento y el campo. En la sección II, se analiza la dinámica en un sistema de referencia en rotación.

En la sección III, se aplican los resultados obtenidos para establecer la dinámica de la rotación de un fluido perfecto sin presión. En la sección IV, se determina cuál debe ser la fuerza que hay que aplicar sobre este modelo de fluido en rotación para que retroceda en el tiempo. Finalmente en el Apéndice se conecta con las ecuaciones del campo y se incluye la gravedad.

I. SISTEMAS DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO

Ecuaciones de la dinámica

Cuando se estudia la dinámica relativista, conviene definir dos observadores ligados a dos sistemas de referencia: uno que se considera fijo y otro en movimiento respecto a él. Estos se denominarán en lo sucesivo como sistema de referencia en reposo S' y sistema de referencia en movimiento S .

Sea S' un sistema de referencia inercial en el que resultan válidas globalmente las leyes de la Relatividad Especial. En este sistema de referencia la métrica es la métrica de Minkowski⁽¹⁾

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta_{\nu\mu} \quad (1.1)$$

Un observador situado en S' define coordenadas cartesianas $x'^{\mu} = (t', x', y', z')$ para medir los sucesos.

Sea S un sistema de referencia en movimiento respecto a S' en el que se utilizan otras coordenadas $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ para medir los eventos.

Las ecuaciones de movimiento en S' de un fluido que se mueve con respecto a S' sometido a la acción de una fuerza externa son

$$f'^{\mu} = \frac{\partial T'^{\mu\alpha}}{\partial x'^{\alpha}} \quad (1.2)$$

donde

$$T'^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + (p + \rho) \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \quad (1.3)$$

es el tensor energía-momento del fluido considerado perfecto en S' , f'^{μ} es la densidad de fuerza externa,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta^{\nu\mu} \quad (1.4)$$

es el inverso de (1.1), esto es,

⁽¹⁾ De aquí en adelante se empleará un sistema de unidades en las que $c=1$ y el convenio de suma sobre índices repetidos.

$$\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (1.5)$$

$\frac{dx'^{\mu}}{d\tau}$ es la velocidad generalizada de una partícula fluida,

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \quad (1.6)$$

siendo $d\tau$ el tiempo propio y p y ρ son la presión y la densidad de energía propia del fluido.

Las ecuaciones de la dinámica deben ser invariantes ante cualquier transformación de coordenadas. Supóngase que las transformaciones entre las coordenadas de S' y S son funciones continuas de la forma

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (1.7)$$

globales y que cubren todo el espacio-tiempo ó como mínimo se extienden a todo el volumen del fluido y las transformaciones inversas son funciones de la forma

$$x^{\mu} = x^{\mu}(t', x', y', z') \quad (1.8)$$

La condición necesaria y suficiente para que esto sea verdad es que el Jacobiano de la transformación sea distinto de cero⁽²⁾

$$\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) \neq 0.$$

Si se efectúa un cambio de coordenadas como el (1.7) en las ecuaciones de movimiento (1.2) del fluido en S' se pueden encontrar las ecuaciones de la dinámica del fluido en cualquier sistema de referencia, por ejemplo el S

$$f^{\mu} = T^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{\partial T^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} T^{\mu\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

donde

$$f^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} f'^{\alpha} \quad (1.10)$$

es la densidad de fuerza externa que actúa sobre una partícula fluida en S ,

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho) \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (1.11)$$

es el tensor energía-momento del fluido perfecto en S y $\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ es la velocidad

generalizada de una partícula fluida medida en S .

También, de (1.6) se deduce

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} dx^{\delta} dx^{\gamma} = -g_{\delta\gamma} dx^{\delta} dx^{\gamma} \quad (1.12)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = g_{\nu\mu} \quad (1.13)$$

es la métrica en S .

La conexión afín $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ se define como

⁽²⁾ Excepto quizás para alguna elección particular de coordenadas llamadas “singulares”.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \quad (1.14)$$

Además $g^{\mu\nu}$ es el tensor inverso de (1.13), esto es

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (1.15)$$

Las ecuaciones (1.9) son invariantes ante cualquier transformación de coordenadas. En ellas aparecen de manera explícita las transformaciones de coordenadas (1.7) a través de la conexión afín (1.14).

Grados de libertad

Las ecuaciones (1.9) junto con la condición (1.12) forman un sistema de cinco ecuaciones con 14 variables ó incógnitas: las cuatro componentes de la velocidad generalizada $\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$, la densidad ρ , la presión p , las cuatro componentes de la densidad

de fuerza externa aplicada f^{μ} , y las cuatro funciones que relacionan las coordenadas en uno y otro sistema de referencia $x'^{\mu} = x'^{\mu}(\mathbf{x})$, que dejan nueve grados de libertad. La ecuación de estado

$$p = p(\rho) \quad (1.16)$$

proporciona otra ecuación que reduce a ocho los grados de libertad.

Si se escoge el sistema de referencia S de manera que el fluido permanezca en reposo con respecto a él, debe ser

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0 \quad (1.17)$$

y se obtienen tres ecuaciones más.

Las ecuaciones (1.17) no fijan por sí solas el Gauge, esto es, el sistema de referencia. Hace falta añadir otra condición: la componente temporal pura de la métrica ha de ser invariante⁽³⁾

$$g_{tt} = \eta_{tt} = -1 \quad (1.18)$$

donde se ha hecho uso de (1.1).

Las tres ecuaciones (1.17) más la ecuación (1.18) simplifican a cuatro los grados de libertad.

Además, se ha de verificar la ecuación de continuidad del fluido, que cuando se conserva la masa-energía en S' adopta la forma

$$f'^{\mu} = \frac{\partial T'^{\mu\alpha}}{\partial x'^{\alpha}} = 0 \quad (1.19)$$

y de esta forma los grados de libertad se reducen a tres, como corresponde a un fluido perfecto en movimiento.

Lo mismo sucede en S': las cuatro ecuaciones (1.2), junto con la condición (1.6), la ecuación de estado (1.16) y la ecuación de continuidad (1.19) constituyen un sistema de siete ecuaciones con diez variables ó incógnitas, lo que permite sólo tres grados de

⁽³⁾ Esta condición es necesaria para que el observador S y el fluido se muevan solidariamente en el tiempo además de en el espacio.

libertad. Estos tres grados de libertad se corresponden con las tres componentes espaciales de la densidad de fuerza externa aplicada que se pueden escoger de manera arbitraria. El resto de variables dinámicas se expresarán como funciones de ellas. No obstante, se pueden escoger tres funciones cualesquiera de las que intervienen en la dinámica como variables independientes, por ejemplo, las funciones que relacionan las coordenadas espaciales en uno y otro sistema de referencia y el resto de variables serán funciones de ellas. Esto es lo que se hará en las siguientes secciones para deducir el movimiento del fluido.

Significado del tiempo

Como es bien sabido, las tres dimensiones espaciales se caracterizan porque en ellas existe libertad de movimiento. A continuación se demuestra por qué esto no es así en el caso del tiempo.

Introduciendo (1.13) en (1.18) se obtiene

$$g_{tt} = -\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)^2 = -1 \quad (1.20)$$

de donde

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)^2 = -1 + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 \quad (1.21)$$

Por otra parte, las componentes de la velocidad de S con respecto a S' son

$$v'^i = \frac{dx'^i}{dt'} = \frac{\frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha}{\frac{\partial t'}{\partial x^\beta} dx^\beta} = \frac{\frac{\partial x'^i}{\partial t} dt + \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j}{\frac{\partial t'}{\partial t} dt + \frac{\partial t'}{\partial x^k} dx^k} = \frac{\frac{\partial x'^i}{\partial t} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j}{\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial x^k} v^k} = \frac{\frac{\partial x'^i}{\partial t}}{\frac{\partial t'}{\partial t}} \quad (1.22)$$

donde se ha usado que

$$v^j = \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (1.23)$$

puesto que S se encuentra en reposo en su sistema de referencia.

Además, el módulo de la velocidad se puede calcular con (1.22) y (1.21):

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v'^i v'^i} = \sqrt{\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{-1 + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2}} \leq 1 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Esta ecuación indica, como era de esperar, que v' nunca puede ser mayor que la unidad, es decir, que ningún sistema de referencia S se puede mover a velocidad mayor a la de la luz, con respecto a S'.

De aquí, se obtiene

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \gamma' \quad (1.25)$$

Esta ecuación explica el fenómeno de la dilatación temporal que se produce con el aumento de la velocidad. Indica que, en ausencia de gravedad, un reloj en reposo respecto a otro marchará al mismo ritmo, mientras que uno que se mueva respecto a otro marcará su propio tiempo, diferente del otro.

Demuestra que el movimiento en la dimensión temporal depende del movimiento en el espacio. En concreto, indica que la velocidad de movimiento en el tiempo $\frac{\partial t'}{\partial t}$ de S con respecto a S' depende de su velocidad v' de desplazamiento en el espacio con respecto a S'.

Por consiguiente, se puede afirmar que el tiempo es una dimensión en la que no existe libertad de movimiento porque el movimiento en la dimensión temporal no es independiente del movimiento en el espacio, sino que depende de éste en la manera indicada por (1.25).

Esta dependencia, que aparece explícita en las ecuaciones de la dinámica (1.9) del fluido en S a través de la conexión afin (1.14), permite determinar con qué velocidad deber moverse un fluido en el espacio para que retroceda en el tiempo. La respuesta se encontrará en las siguientes secciones.

Campo Inercial

La conexión afin se puede calcular utilizando las ecuaciones (1.14) ó con la métrica $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (1.26)$$

El tensor de curvatura en S se puede definir en función de la conexión afin como

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} \quad (1.27)$$

Como el tensor de curvatura en S' es claramente cero, se deduce de las leyes de transformación de los tensores que también es cero en cualquier otro sistema de referencia

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = 0 \quad (1.28)$$

Este resultado implica que el espacio-tiempo en S es plano en lugar de curvo y que en el sistema de referencia en movimiento S no aparece la Gravedad.

El tensor de Ricci se obtiene por contracción del tensor de curvatura y también es cero según (1.28)

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = 0 \quad (1.29)$$

Esta ecuación indica que el campo en S no tiene fuentes sino que es originado únicamente por el movimiento de S con respecto a S'.

En resumen el campo en S no tiene fuentes que curven el espacio-tiempo.

II. SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACION

Transformación de coordenadas

Un sistema de referencia S en rotación es un sistema de referencia acelerado con una particularidad interesante: ni se acerca ni se aleja del sistema de referencia en reposo S'.

En este caso conviene definir en S coordenadas cilíndricas $x^\mu = (t, r, \theta, z)$ por razones prácticas. Si el movimiento es circular, hay que añadir dos ecuaciones más a las (1.9) y (1.12)

$$\left. \begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= r^2 \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

lo cual reduce a uno los grados de libertad para un fluido perfecto en reposo respecto a S.

Las transformaciones entre las coordenadas del sistema de referencia en reposo S' y las coordenadas del sistema de referencia en rotación S (1.7) compatibles con (2.1) son funciones de la forma

$$\left. \begin{aligned} t' &= t'(t, r) \\ x' &= r \cos[\theta - \varphi(t)] \\ y' &= r \sin[\theta - \varphi(t)] \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

La validez de estas transformaciones puede ser verificada a posteriori, como solución de las ecuaciones de movimiento obtenidas en la sección III.

El tensor métrico

La métrica en S se puede calcular con (1.13), (1.1) y (2.2):

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -1 \\ g_{tr} &= -\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} = g_{rt} \\ g_{t\theta} &= -r^2 \frac{d\varphi}{dt} = g_{\theta t} \\ g_{tz} &= 0 = g_{zt} \\ g_{rr} &= 1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial r}\right)^2 \\ g_{r\theta} &= 0 = g_{\theta r} \\ g_{rz} &= 0 = g_{zr} \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\theta z} &= 0 = g_{z\theta} \\ g_{zz} &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde se ha usado (1.18) en la primera de las ecuaciones. El determinante del tensor métrico es

$$\det g_{\mu\nu} = g_{tt}g_{rr}g_{\theta\theta} - g_{tr}^2g_{\theta\theta} - g_{rr}g_{t\theta}^2 = -r^2 \left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = -g \quad (2.4)$$

La primera de las ecuaciones (2.3) se puede escribir como

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \pm \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} \quad (2.5)$$

Esta ecuación admite dos soluciones⁽⁴⁾. La solución positiva implica que t' aumenta con t , lo que es conocido como el fenómeno de la dilatación temporal. En la sección IV se verá bajo qué circunstancias es admisible la solución negativa que asegura una disminución de t' conforme t aumenta lo que permitiría realizar viajes al pasado.

Inverso del tensor métrico

El inverso de la métrica se puede calcular con (1.15) y las ecuaciones (2.3):

$$\begin{aligned} g^{tt} &= \frac{-1 + \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} \\ g^{tr} &= \frac{-\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r}}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} = g^{rt} \\ g^{t\theta} &= -\frac{\left[1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{d\varphi}{dt}}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} = g^{\theta t} \\ g^{tz} &= 0 = g^{zt} \\ g^{rr} &= 1 \\ g^{r\theta} &= -\frac{\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{d\varphi}{dt}}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} = g^{\theta r} \\ g^{rz} &= 0 = g^{zr} \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1 + r^2 \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{r^2 \left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]} \\ g^{\theta z} &= 0 = g^{z\theta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

⁽⁴⁾ En lo sucesivo y de manera general se mostrarán ambos signos \pm excepto cuando se opte justificadamente por uno ú otro.

$$g^z = 1$$

La conexión afín

Derivando (2.5) se obtiene

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} = \frac{r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{\pm \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}}; \quad \frac{\partial^2 t'}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^2 t'}{\partial r \partial t} = \frac{r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{\pm \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}} \quad (2.7)$$

La conexión afín se puede calcular con (1.26), las derivadas de la métrica (2.3), el inverso del tensor métrico (2.6) y con (2.7):

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^t &= \frac{\pm r \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \\ \Gamma_{uu}^r &= -r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ \Gamma_{uu}^\theta &= \frac{\pm r \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 - \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \\ \Gamma_{rt}^t &= \frac{r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \Gamma_{tr}^t \\ \Gamma_{\alpha t}^t &= -\frac{r \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{d\varphi}{dt}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \Gamma_{t\alpha}^t \\ \Gamma_{rr}^t &= \frac{\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial^2 t'}{\partial r^2}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \\ \Gamma_{\theta\theta}^t &= \frac{r \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \\ \Gamma_{t\theta}^r &= r \frac{d\varphi}{dt} = \Gamma_{\theta t}^r \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{tr}^{\theta} = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{r \left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]} = \Gamma_{rt}^{\theta}$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\theta} = -\frac{r \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} = \Gamma_{\theta t}^{\theta}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$$

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial^2 t'}{\partial r^2} \frac{d\varphi}{dt}}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} = \Gamma_{\theta r}^{\theta}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{r \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} \frac{d\varphi}{dt}}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}$$

El resto de componentes son cero.

III. DINAMICA DE LA ROTACION DE UN FLUIDO PERFECTO SIN PRESION

Ecuaciones de la dinámica en el sistema de referencia en rotación

En esta sección se aplican los resultados anteriores para el modelo más simple de fluido, esto es, un fluido perfecto sin presión. En este caso la ecuación (1.16) se sustituye por

$$p = 0 \quad (3.1)$$

y el tensor energía-momento del fluido perfecto en S se obtiene introduciendo (3.1) en (1.11)

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (3.2)$$

Este modelo representa a un fluido sin interacción entre sus partículas, es decir, sin fuerzas a distancia ni colisiones entre ellas por lo que se asemeja más bien a un modelo de polvo.

Si el fluido se encuentra en rotación y se escoge un sistema de referencia S que se encuentre en reposo con respecto al fluido, entonces resultan válidas las ecuaciones (1.17), que en coordenadas cilíndricas adoptan la forma

$$\frac{dr}{d\tau} = 0; \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0; \quad \frac{dz}{d\tau} = 0 \quad (3.3)$$

Estas ecuaciones junto con las (1.12) y (1.18) implican que

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \quad (3.4)$$

En este sistema de referencia el tensor-energía momento se obtiene con (3.2), (3.3) y (3.4)

$$T^{tt} = \rho; \quad T^{ti} = T^{it} = 0; \quad T^{ij} = 0. \quad (3.5)$$

Las componentes de la densidad de fuerza externa aplicada sobre el fluido en S se calculan con (1.9), (2.8) y (3.5)

$$f^t = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\rho\Gamma_{tt}^t + \rho\Gamma_{\alpha t}^\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\pm r \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} + 2\rho \frac{r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \quad (3.6)$$

$$f^r = \rho\Gamma_{tt}^r = -\rho r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (3.7)$$

$$f^\theta = \rho\Gamma_{tt}^\theta = \rho \frac{\pm r \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 - \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \quad (3.8)$$

$$f^z = 0 \quad (3.9)$$

Las componentes de la densidad de fuerza externa f'^{μ} en S' se pueden calcular invirtiendo (1.10)

$$f'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} f^{\alpha} \quad (3.10)$$

En concreto, la componente temporal de (3.10) se puede calcular con la primera de (2.2) (3.6) y (3.7)

$$f'' = \frac{\partial t'}{\partial t} f^t + \frac{\partial t'}{\partial r} f^r = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial r} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{Ln} \left[1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] \right\} \quad (3.11)$$

El principio de conservación de la masa-energía en S' exige que se verifique (1.19) que con (3.11) da

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = -\partial \text{Ln} \left[1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] \quad (3.12)$$

Integrando esta última ecuación entre t_i y t se puede conocer la densidad ρ del fluido

$$\rho = \rho(t_i) \frac{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2_{t=t_i}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \rho_i \frac{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2_{t=t_i}}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \quad (3.13)$$

Esta ecuación muestra que la densidad de energía propia del fluido ρ es siempre mayor ó igual que cero

$$\rho \geq 0.$$

Derivando (3.13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -2\rho_i r^2 \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right] \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right]^2} \quad (3.14)$$

Finalmente, las ecuaciones de la dinámica (3.6) a (3.9) con (3.13) y (3.14) son

$$f^t = \pm \rho_i r \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right] \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right]^2} \quad (3.15)$$

$$f^r = -\rho_i r \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2} \quad (3.16)$$

$$f^\theta = \rho_i \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right] \left[\pm r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 - \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right]}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right]^2} \quad (3.17)$$

$$f^z = 0 \quad (3.18)$$

Como se vio al principio de la sección II, un fluido perfecto en rotación posee un solo grado de libertad. Este grado de libertad se corresponde con la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$ de la rotación de S' con respecto a S , que se puede escoger como variable independiente. El resto de variables dinámicas serán función de ella. Así sucede con las funciones que relacionan las coordenadas espaciales y temporales en uno y otro sistema de referencia que se pueden obtener como función de la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$ a través de (2.2) y (2.5), respectivamente. Además, como el movimiento de rotación se produce por la aplicación de la componente radial f^r y la componente tangencial f^θ calculadas en (3.16) y (3.17), en lo sucesivo sólo se referirán estas dos componentes.

Ecuaciones de la dinámica en el sistema de referencia en reposo

También conviene determinar la dinámica de la rotación del fluido en el sistema de referencia S' . Esto se puede hacer, en coordenadas cartesianas a través de las ecuaciones (3.10), (2.2) y (3.15) a (3.18). Ahora bien desde un punto de vista práctico conviene

utilizar coordenadas cilíndricas también en S' . La relación entre las coordenadas cilíndricas en S' y S se obtiene con (2.2)

$$\left. \begin{aligned} t' &= t'(t, r) \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = r \\ \theta' &= \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'} = \theta - \varphi(t) \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Esta relación permite obtener directamente la densidad de fuerza externa en S' en coordenadas cilíndricas usando además (1.19), (3.10) y (3.15) a (3.18)

$$f'^t = 0 \quad (3.20)$$

$$f'^r = f^r \quad (3.21)$$

$$f'^\theta = -\frac{d\varphi}{dt} f^t + f^\theta = -\rho_i \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right] \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]^2} \quad (3.22)$$

$$f'^z = f^z = 0 \quad (3.23)$$

Se hubiera conseguido el mismo resultado si primero se calcula f'^μ en S' en coordenadas cartesianas y luego se realiza una transformación a las coordenadas cilíndricas en S' , a través de (3.10), para obtener finalmente f'^μ en coordenadas cilíndricas. También y por las mismas razones expuestas para S , en lo sucesivo sólo se referirán las componentes radial f'^r y tangencial f'^θ de la densidad de fuerza externa.

Límite clásico

El límite clásico de las ecuaciones de la dinámica (3.21) y (3.22) se obtiene para velocidades mucho menores que la de la luz. Introduciendo (2.5) en (1.24)

$$v' = \frac{r \frac{d\varphi}{dt}}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}} \leq 1 \quad (3.24)$$

se deduce que $v' \ll 1$ si

$$r \frac{d\varphi}{dt} \ll 1 \quad (3.25)$$

Teniendo en cuenta (3.25) y (3.16) las ecuaciones (3.21) y (3.22) en límite clásico son

$$f'^r \approx -\rho_0 r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (3.26)$$

$$f'^\theta \approx -\rho_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3.27)$$

donde se ha supuesto por simplicidad que el fluido parte del reposo en el instante inicial $t_i = t_0$ de S en el que la densidad es ρ_0 . Conviene expresar f'^r y f'^θ en función del

tiempo t' en S' . Con este propósito se resuelve (2.5) con la aproximación (3.25) obteniendo

$$t' - t'_i \approx t - t_i \quad (3.28)$$

Finalmente, las ecuaciones (3.26) y (3.27) con (3.28) proporcionan

$$f'' \approx -\rho_0 r \left(\frac{d\varphi}{dt'} \right)^2 \quad (3.29)$$

$$f'^{\theta} \approx -\rho_0 \frac{d^2\varphi}{dt'^2} \quad (3.30)$$

que coinciden con el resultado clásico para un fluido sin presión y en movimiento circular.

Materia oscura

Si la velocidad angular de la rotación es constante

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (3.31)$$

entonces si el fluido parte del reposo en el instante inicial $t_i = t_0$ de S en el que la densidad es ρ_0 , la fuerza centrípeta relativista (3.21) con (3.16),

$$f'_{rel}{}^r = -\rho_0 r \frac{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} = -\rho_0 \frac{\omega^2 r}{1 + \omega^2 r^2} \quad (3.32)$$

y la fuerza centrípeta clásica (3.26)

$$f'_{clas}{}^r = -\rho_0 \omega^2 r \quad (3.33)$$

no dependen del tiempo y $f'_{rel}{}^r < f'_{clas}{}^r$ lo que implica

$$\rho_{rel} = \frac{\rho_{clas}}{1 + \omega^2 r^2} \quad (3.34)$$

Esto significa que en el caso clásico a velocidad angular constante, habrá que suponer una densidad mayor que en el relativista. La interpretación es evidente: para explicar la dinámica de la rotación de este fluido se necesita recurrir a la materia oscura en el caso clásico mientras que no resulta necesaria con el formalismo relativista.

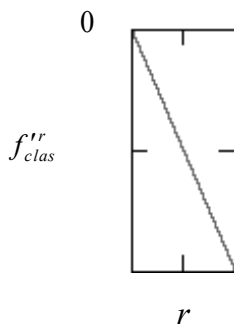


Fig. 1. Representación gráfica de $f'_{clas}{}^r$ frente a r a velocidad angular ω constante.

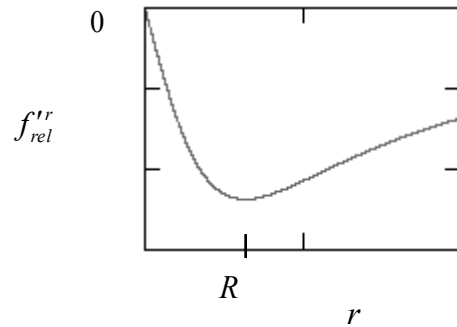


Fig. 2. Representación gráfica de $f'_{rel}{}^r$ frente a r a velocidad angular ω constante.

La discrepancia entre uno y otro resultado será más evidente cuanto mayor sea v' .

Introduciendo (3.31) en (3.24)

$$v' = \frac{\omega r}{\sqrt{1 + \omega^2 r^2}} \quad (3.35)$$

se observa que v' aumenta con r . Esto significa que para puntos cercanos al centro de giro v' es no relativista, mientras que para distancias suficientemente alejadas del centro de giro v' se hace relativista, como corresponde a un movimiento de rotación. En concreto para velocidades angulares ω pequeñas v' se aproximará a la unidad para valores grandes de r . Por el contrario, si ω es grande v' será relativista incluso para valores pequeños de r .

El mayor valor negativo de f'_{rel} sucede cuando

$$\frac{df'_{rel}}{dr} = 0 \quad (3.36)$$

que con (3.32) se produce cuando

$$R = \frac{1}{\omega} \quad (3.37)$$

Energía oscura

El primer término de (3.17)

$$\pm \rho_t r \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=t_i}^2 \right] \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} \frac{\partial t'}{\partial r} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]^2} \quad (3.38)$$

es un término de energía oscura. Es una consecuencia relativista debida a la dependencia de t' con r . Durante el movimiento, cuando $\frac{\partial t'}{\partial t}$ es positivo

$$\frac{\partial t'}{\partial r} > 0 \quad (3.39)$$

entonces si la aceleración angular $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ y la velocidad angular de la rotación $\frac{d\varphi}{dt}$ tienen el mismo signo, lo cual indica aceleración positiva ó negativa, la energía oscura disminuye la fuerza de inercia f^θ . Si por el contrario tienen distinto signo, se produce una desaceleración positiva ó negativa y la energía oscura aumenta la fuerza de inercia f^θ .

Para velocidades angulares de rotación $\frac{d\varphi}{dt}$ pequeñas este efecto será importante para valores elevados de r . Si la velocidad angular de la rotación $\frac{d\varphi}{dt}$ es grande, el efecto será notable para valores pequeños de r .

Obsérvese que según (3.22) la energía oscura no aparece en el sistema de referencia en reposo S' sino que es exclusiva del sistema de referencia en rotación S .

La presencia de la energía oscura es la responsable de que en S no se conserve la masa-energía como puede deducirse de (3.15).

IV. VIAJES EN EL TIEMPO

En esta sección se aplican los resultados obtenidos en las secciones anteriores para determinar cómo debe ser la dinámica de la rotación de un fluido perfecto sin presión para que retroceda en el tiempo. Esto supone encontrar la fuerza externa que hay que aplicar sobre dicho fluido que le produzca un movimiento de rotación en el espacio que lleve asociado un retroceso temporal. Con esta finalidad se fija el único grado de libertad que posee un fluido perfecto en rotación. Conviene elegir, entre todas las variables que intervienen en la dinámica, la velocidad angular de la rotación $\frac{d\varphi}{dt}$ que aparece en las ecuaciones de movimiento (3.16) y (3.17) como variable independiente. Esta variable se escoge de manera que el desplazamiento temporal asociado que se obtiene de (2.5) permita el retroceso temporal del fluido. Esto implica encontrar en qué circunstancias es admisible el signo negativo en la ecuación (2.5). El viaje transcurrirá en cinco etapas.

Aceleración temporal

Antes de iniciarse el movimiento, los observadores situados en S' y S se encuentran en un sistema de referencia inercial en el que resulta válida la métrica (1.1). Esto permite que los relojes de ambos sistemas se sincronicen de acuerdo con el criterio de las señales luminosas propuesto por Einstein [1].

La primera etapa del viaje temporal transcurre durante el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ para un observador situado en S. Si la rotación parte del reposo en el instante inicial $t = t_0$ la función $\varphi(t)$ más simple es de la forma

$$\varphi_I(t) = \frac{a_1}{2}(t - t_0)^2 \quad (4.1)$$

La velocidad angular es

$$\frac{d\varphi_I}{dt} = a_1(t - t_0) \quad (4.2)$$

que, como parte del reposo en el instante inicial t_0 , es cero como se deduce de (4.2)

$$\left. \frac{d\varphi_I}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (4.3)$$

La aceleración angular es

$$\frac{d^2\varphi_I}{dt^2} = a_1 \quad (4.4)$$

donde a_1 es una constante que puede escogerse de manera que

$$a_1 > 0 \quad (4.5)$$

Introduciendo (4.2) en (2.5)

$$\frac{\partial t'_I}{\partial t} = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)^2} = \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} \quad (4.6)$$

e integrando se obtiene la función $t'_I = t'_I(t, r)$

$$t'_1 = t'_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} dt = t'_0 + \frac{t - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} \right] \quad (4.7)$$

Derivando (4.7)

$$\frac{\partial t'_1}{\partial r} = \frac{t - t_0}{2r} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} - \frac{1}{2a_1 r^2} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} \right] \geq 0 \quad (4.8)$$

Introduciendo (4.2) a (4.4) en (3.16) y (3.17) se obtiene para este fluido en el sistema de referencia S durante la primera etapa del viaje temporal

$$f_I^r = -\rho_0 r \frac{\left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)^2} = -\frac{\rho_0 a_1^2 r (t - t_0)^2}{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} \quad (4.9)$$

$$f_I^\theta = \rho_0 \frac{r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)^2} \frac{\partial t'_1}{\partial r} \left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)^3 - \frac{d^2 \varphi_I}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)^2 \right]^2} = \rho_0 \frac{r \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2} \frac{\partial t'_1}{\partial r} a_1^3 (t - t_0)^3 - a_1}{\left[1 + a_1^2 r^2 (t - t_0)^2 \right]^2} \quad (4.10)$$

donde $\frac{\partial t'_1}{\partial r}$ viene dado por (4.8).

La primera etapa del viaje transcurre para un observador situado en S' durante el intervalo $t'_0 \leq t' \leq t'_1$. La dinámica de la rotación de este fluido en este sistema de referencia durante esta etapa se obtiene introduciendo (4.2) y (4.4) con (3.28) en (3.29) y (3.30)

$$f_I^{rr} \approx -\rho_0 a_1^2 r (t' - t'_0)^2 \quad (4.11)$$

$$f_I^{\theta\theta} = -\rho_0 a_1 \quad (4.12)$$

expresiones que resultan válidas si se verifica (3.25) que en este caso, teniendo en cuenta (4.2) adopta la forma

$$r \frac{d\varphi_I}{dt} = a_1 r (t - t_0) < a_1 r (t_1 - t_0) \ll 1 \quad (4.13)$$

Inversión temporal

La segunda etapa del viaje temporal transcurre durante el intervalo $t_1 \leq t \leq t_3$ para un observador situado en S. La función $\varphi(t)$ más simple, que origina una inversión temporal es de la forma

$$\varphi_{II}(t) = \varphi_{II}(t_1) - \frac{1}{a_2} \left[a_2 (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{a_2} \left[a_2 (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.14)$$

donde t_2 , a_2 y b_2 son constantes verificando

$$t_1 < t_2 < t_3; \quad b_2 > 0; \quad b_2 > -a_2(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} \quad (4.15)$$

La velocidad angular es⁽⁵⁾

$$\frac{d\varphi_{II}}{dt} = \frac{1}{(t_2 - t)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_2(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2} \quad (4.16)$$

La aceleración angular es

$$\frac{d^2\varphi_{II}}{dt^2} = \frac{b_2}{3(t_2 - t)^{\frac{4}{3}} \sqrt{a_2(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2}} \quad (4.17)$$

Las funciones $\varphi(t)$ y $\frac{d\varphi}{dt}$ deben ser continuas en $t = t_1$

$$\varphi_I(t_1) = \varphi_{II}(t_1) \quad (4.18)$$

que con (4.1) y (4.14) proporciona

$$\varphi_{II}(t_1) = \frac{a_1}{2} (t_1 - t_0)^2 \quad (4.19)$$

y

$$\left. \frac{d\varphi_I}{dt} \right|_{t=t_1} = \left. \frac{d\varphi_{II}}{dt} \right|_{t=t_1} \quad (4.20)$$

Esta última ecuación con (4.2) y (4.16) lleva a

$$a_1 = \frac{1}{t_1 - t_0} \sqrt{a_2 + \frac{b_2}{(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}}}} \quad (4.21)$$

Introduciendo (4.16) en (2.5)

$$\frac{\partial t'_{II}}{\partial t} = \pm \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2} = \frac{1}{(t_2 - t)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \quad (4.22)$$

Se observa que para $t \geq t_2$ los dos signos en (4.22) tienen sentido, como se había comentado en (2.5). Por supuesto, para que el viaje al pasado sea posible se ha escogido el signo negativo en (4.22) para $t \geq t_2$. Integrando (4.22) se obtiene $t'_{II} = t'_{II}(t, r)$

$$\begin{aligned} t'_{II} &= t'_1 + \int_{t_1}^t \frac{1}{(t_2 - t)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} dt \\ &= t'_1 - \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

La continuidad de t' implica

$$t'_{II}(t_1) = t'_I(t_1) \quad (4.24)$$

que con (4.23) da

$$t'_1 = t'_I(t_1) \quad (4.25)$$

Introduciendo (4.7) en $t = t_1$ en (4.25)

⁽⁵⁾ Notar que la métrica (2.3) es singular en $t = t_2$ en el sistema de referencia S, pero esto no es un problema como se verá a continuación.

$$t'_1 = t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \quad (4.26)$$

Insertando (4.26) en (4.23)

$$t'_{II} = t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] - \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.27)$$

Para evitar divergencias en (4.27) conviene que

$$a_2 > 0 \quad (4.28)$$

La forma de la función (4.27) que alcanza un máximo en $t = t_2$ permite el retroceso temporal. En el instante $t = t_2$ de S se produce la inversión temporal. Por supuesto este proceso sólo es posible si la densidad de fuerza externa (3.16) y (3.17) aplicada sobre este fluido en S y la densidad de fuerza externa (3.21) y (3.22) aplicada según S' son finitas.

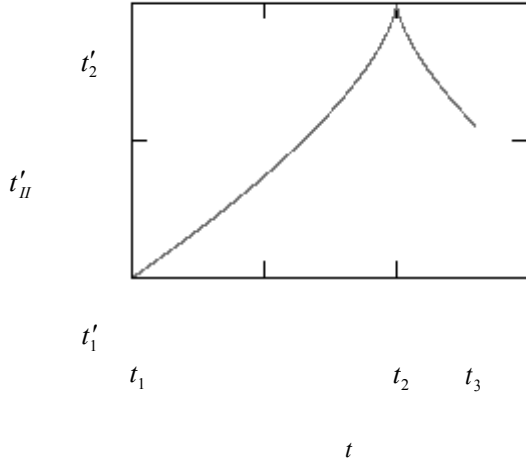


Fig. 3. Representación gráfica de t'_{II} frente a t para r fijo durante la segunda etapa del viaje temporal

Derivando (4.23), haciendo uso de (4.25) y de (4.8) en $t = t_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'_{II}}{\partial r} = & \frac{t_1 - t_0}{2r} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} - \frac{1}{2a_1 r^2} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ & - \frac{a_2 r (1 + a_2 r^2) (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + a_2 b_2 r^3 + 3b_2 r \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2}}{(1 + a_2 r^2)^2} \\ & + \frac{a_2 r (1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + a_2 b_2 r^3 + 3b_2 r \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2}}{(1 + a_2 r^2)^2} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

La densidad en el instante $t = t_1$ se obtiene a partir de (3.13) y (4.3)

$$\rho_1 = \rho(t_1) = \frac{\rho_0}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_I}{dt} \right)_{t=t_1}^2} \quad (4.30)$$

Introduciendo (4.16), (4.17) y (4.30) en (3.16) y (3.17) y haciendo uso de (4.20) se obtiene para este fluido en el sistema de referencia S durante la segunda etapa del viaje temporal

$$f_{II}^r = -\rho_0 r \frac{\left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2} = -\rho_0 r \frac{a_2 (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2}{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \quad (4.31)$$

$$f_{II}^\theta = \rho_0 \frac{\pm r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2} \frac{\partial t'_{II}}{\partial r} \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^3 - \frac{d^2 \varphi_{II}}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \rho_0 \frac{r \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \frac{\partial t'_{II}}{\partial r} \left[a_2 (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} - \frac{b_2}{3 \sqrt{a_2 (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2}}}{\left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^2} \quad (4.32)$$

donde $\frac{\partial t'_{II}}{\partial r}$ viene dado por (4.29). Se observa que, a pesar de que la métrica (2.3) es singular en $t = t_2$, tanto f_{II}^r como f_{II}^θ son finitas durante todo el intervalo.

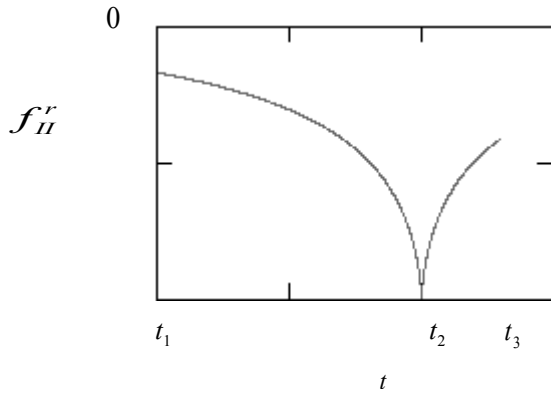


Fig. 4. Representación gráfica de f_{II}^r frente a t para r fijo durante la segunda etapa del viaje temporal.

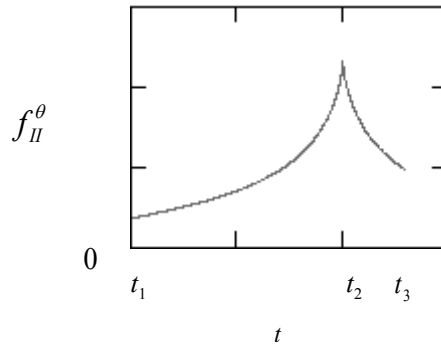


Fig. 5. Representación gráfica de f_{II}^θ frente a t para r fijo durante la segunda etapa del viaje temporal.

Inspeccionando (4.32) se observa que para $t \geq t_2$ tienen sentido tanto la solución positiva como la negativa de (2.5). Para diferenciar entre ambas soluciones, hay que fijarse en la densidad de fuerza f_{II}^θ que depende del signo de $\frac{\partial t'_{II}}{\partial t}$ ya que $\frac{\partial t'_{II}}{\partial r} > 0$. Esto

significa que en el sistema de referencia S se obtienen valores diferentes de f_{II}^{θ} según el signo positivo ó negativo de $\frac{\partial t'_{II}}{\partial t}$. Es esta circunstancia, la que hace posible el viaje al pasado, porque para $t \geq t_2$ las soluciones positiva y negativa en (2.5) se diferencian físicamente en S, lo que permite escoger entre una ú otra. Además se puede comprobar que la solución (4.32) cambiada de signo cuando $t \geq t_2$ también permite el viaje al pasado. Ambas soluciones tan sólo se diferencian en el signo de la velocidad angular $\frac{d\varphi_{II}}{dt}$.

La segunda etapa del viaje transcurre para un observador situado en S' durante el intervalo $t'_1 \leq t' \leq t'_3$. La dinámica de la rotación de este fluido en este sistema de referencia durante esta etapa se obtiene con (3.21) y (4.31), introduciendo (4.16), (4.17) y (4.30) en (3.22) y teniendo en cuenta (4.3) y (4.20)

$$f_{II}^{r'} = f_{II}^r = -\rho_0 r \frac{a_2(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2}{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \quad (4.33)$$

$$f_{II}^{r'\theta} = -\rho_0 \frac{\frac{d^2\varphi_{II}}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt}\right)^2\right]^2} = \frac{-\rho_0 b_2}{3\sqrt{a_2(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2\right]^2} \quad (4.34)$$

Se observa que en S' la densidad de fuerza $f_{II}^{r'\theta}$ en (4.34) no depende de $\frac{\partial t'_{II}}{\partial t}$. Esto quiere decir que un observador situado en S' no puede forzar el retroceso temporal porque las soluciones positiva y negativa de (2.5) conducen a la misma densidad de fuerza externa $f_{II}^{r'\theta}$. Por este motivo, la densidad de fuerza $f_{II}^{r'\theta}$ de (4.34) sólo proporciona $\frac{\partial t'_{II}}{\partial t} > 0$. En cambio, un observador situado en el sistema de referencia S, sí distingue físicamente ambas soluciones y puede escoger la solución de (4.32) que provoca el retroceso temporal.

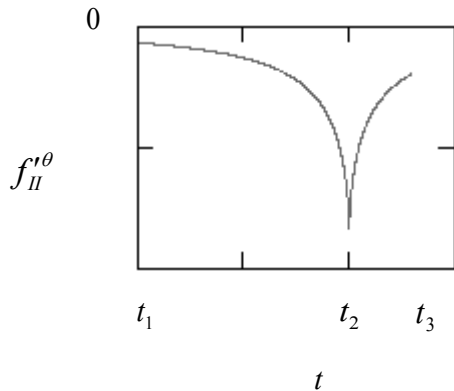


Fig. 6. Representación gráfica de $f_{II}^{r'\theta}$ frente a t para r fijo durante la segunda etapa del viaje temporal.

Conviene expresar los resultados (4.33) y (4.34) en función del tiempo t' medido por S' . Para ello es necesario despejar t como función de t' de (4.23) obteniendo

$$(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 = \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (4.35)$$

$$(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{b_2 r^2}{1 + a_2 r^2} \quad (4.36)$$

$$t = t_2 \pm \left\{ \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{b_2 r^2}{1 + a_2 r^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (4.37)$$

que son la misma ecuación, con t'_1 dado por (4.26).

Introduciendo (4.35) y (4.36) en (4.33) y (4.34) se llega a

$$f''_{II} = -\rho_0 r \frac{a_2 \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} + b_2}{(1 + a_2 r^2) \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}}} \quad (4.38)$$

$$f''_{II}{}^\theta = \frac{-\rho_0 b_2 \sqrt{1 + a_2 r^2}}{3 \sqrt{a_2 \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} + b_2 \left[(1 + a_2 r^2)(t'_1 - t') + \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{4}{3}}} \quad (4.39)$$

donde t'_1 está dado por (4.26). Se observa que tanto f''_{II} como $f''_{II}{}^\theta$ son finitas en todo el intervalo.

Durante esta etapa del viaje temporal el fluido alcanza la velocidad de la luz en S' . Esto se puede comprobar introduciendo (4.16) en (3.24)

$$v'_{II} = \frac{r \frac{d\varphi_{II}}{dt}}{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2}} = \frac{r \sqrt{a_2 (t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2}}{\sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2}} \quad (4.40)$$

de manera que

$$v'_{II}(t_2) = 1 \quad (4.41)$$

en el instante $t = t_2$ de S ó en el instante t'_2 de S' donde

$$t'_2 = t'_{II}(t_2) = t'_1 - \frac{1}{1+a_2 r^2} b_2^{\frac{3}{2}} r^3 + \frac{1}{1+a_2 r^2} \left[(1+a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.42)$$

se obtiene haciendo $t = t_2$ en (4.23) quedando t'_1 determinado por (4.26).

Resulta llamativo que un fluido como el descrito pueda alcanzar la velocidad de la luz en S' . Esto es impensable en el caso de una partícula material. La diferencia está en la ecuación de continuidad (1.19) que sólo se verifica en el caso del fluido. Esta ecuación tiene como consecuencia que la densidad del fluido que se obtiene de (3.13) con (4.30), (4.3), (4.20) y (4.16) durante la segunda etapa del viaje

$$\rho_{II} = \frac{\rho_0}{1+r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)^2} = \frac{\rho_0 (t_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{(1+a_2 r^2)(t_2 - t)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \quad (4.43)$$

pueda anularse en el instante $t = t_2$ de S en el que se alcanza la velocidad de la luz en S' y se produce la inversión temporal. Esto sucede gradualmente en S' en el instante t'_2 dado por (4.42) porque t'_2 depende de r . Como la masa-energía se conserva en S' por verificarse la ecuación de continuidad (1.19) esto significa que la masa del fluido se va transformando progresivamente en energía. Esto puede suceder de manera instantánea en S' si el fluido se encuentra confinado en un anillo de anchura infinitesimal. Es gracias a este fenómeno que el fluido puede alcanzar la velocidad de la luz en el sistema de referencia S' .

Retroceso temporal

La tercera etapa del viaje temporal transcurre durante el intervalo $t_3 \leq t \leq t_4$ para un observador situado en S . Conviene que durante esta etapa la velocidad angular de la rotación sea constante. Como la velocidad angular de la rotación $\frac{d\varphi}{dt}$ debe ser continua esto significa que

$$\left. \frac{d\varphi_{III}}{dt} \right|_{t=t_3} = \left. \frac{d\varphi_{II}}{dt} \right|_{t=t_3} \quad (4.44)$$

y también que según (4.44) y (4.16) la velocidad angular es

$$\frac{d\varphi_{III}}{dt} = \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2} \quad (4.45)$$

Integrando (4.45)

$$\varphi_{III}(t) = \varphi_{III}(t_3) + \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2} (t - t_3) \quad (4.46)$$

La continuidad de la función $\varphi(t)$ implica

$$\varphi_{III}(t_3) = \varphi_{II}(t_3) = \frac{a_1}{2} (t_1 - t_0)^2 - \frac{1}{a_2} \left[a_2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{a_2} \left[a_2 (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.47)$$

como puede deducirse de (4.14) y (4.19).

Derivando (4.45) se obtiene la aceleración angular

$$\frac{d^2\varphi_{III}}{dt^2} = 0 \quad (4.48)$$

Introduciendo (4.45) en (2.5)

$$\frac{\partial t'_{III}}{\partial t} = -\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi_{II}}{dt}\right)^2} = \frac{1}{(t_2-t_3)^{\frac{1}{3}}}\sqrt{(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2} \quad (4.49)$$

e integrando se obtiene $t'_{III} = t'_{III}(t, r)$

$$t'_{III} = t'_3 + \frac{1}{(t_2-t_3)^{\frac{1}{3}}}\sqrt{(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2}(t-t_3) \quad (4.50)$$

La continuidad de t' implica

$$t'_{III}(t_3) = t'_{II}(t_3) \quad (4.51)$$

que con (4.50) da

$$t'_3 = t'_{II}(t_3) \quad (4.52)$$

Introduciendo (4.23) en $t = t_3$ en (4.52) y haciendo uso de (4.26)

$$t'_3 = t'_0 + \frac{t_1-t_0}{2}\sqrt{1+a_1^2r^2(t_1-t_0)^2} + \frac{1}{2a_1r}\text{Ln}\left[a_1r(t_1-t_0) + \sqrt{1+a_1^2r^2(t_1-t_0)^2}\right] - \frac{1}{1+a_2r^2}\left[(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+a_2r^2}\left[(1+a_2r^2)(t_2-t_1)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2\right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.53)$$

Sustituyendo (4.53) en (4.50)

$$t'_{III} = t'_0 + \frac{t_1-t_0}{2}\sqrt{1+a_1^2r^2(t_1-t_0)^2} + \frac{1}{2a_1r}\text{Ln}\left[a_1r(t_1-t_0) + \sqrt{1+a_1^2r^2(t_1-t_0)^2}\right] - \frac{1}{1+a_2r^2}\left[(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+a_2r^2}\left[(1+a_2r^2)(t_2-t_1)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{(t_2-t_3)^{\frac{1}{3}}}\sqrt{(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2}(t-t_3) \quad (4.54)$$

Derivando (4.50) y haciendo uso de (4.52) y de (4.29) en $t = t_3$

$$\frac{\partial t'_{III}}{\partial r} = \frac{t_1-t_0}{2r}\sqrt{1+a_1^2r^2(t_1-t_0)^2} - \frac{1}{2a_1r^2}\text{Ln}\left[a_1r(t_1-t_0) + \sqrt{1+a_1^2r^2(t_1-t_0)^2}\right] - \frac{a_2r(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+a_2b_2r^3+3b_2r}{(1+a_2r^2)^2}\sqrt{(1+a_2r^2)(t_2-t_3)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2} + \frac{a_2r(1+a_2r^2)(t_2-t_1)^{\frac{2}{3}}+a_2b_2r^3+3b_2r}{(1+a_2r^2)^2}\sqrt{(1+a_2r^2)(t_2-t_1)^{\frac{2}{3}}+b_2r^2}$$

$$+ \frac{a_2 r (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}} \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2}} (t - t_3) \quad (4.55)$$

Conviene determinar la velocidad (4.49) del retroceso temporal. Como $\frac{\partial t'_{III}}{\partial t}$ depende de r para determinar esta velocidad conviene fijar un r de manera que para $r = r_0$ se verifique

$$\left. \frac{\partial t'_{III}}{\partial t} \right|_{r_0, t_3} = -k \quad (4.56)$$

donde k es una constante mayor que cero

$$k > 0 \quad (4.57)$$

Insertando (4.49) en (4.56) se obtiene

$$\frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2} = -k \quad (4.58)$$

$$(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 = k^2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} \quad (4.59)$$

$$t_3 = t_2 + \left(\frac{b_2 r_0^2}{k^2 - 1 - a_2 r_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.60)$$

que son la misma ecuación.

La densidad en el instante $t = t_3$ se obtiene a partir de (3.13), haciendo uso de (4.30) y (4.20)

$$\rho_3 = \rho(t_3) = \frac{\rho_0}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dt} \right)_{t=t_3}^2} \quad (4.61)$$

Introduciendo (4.45), (4.48) y (4.61) en (3.16) y (3.17) y haciendo uso de (4.44) se obtiene para este fluido en el sistema de referencia S durante la tercera etapa del viaje temporal

$$f_{III}^r = -\rho_0 r \frac{\left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)^2} = -\rho_0 r \frac{a_2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2}{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \quad (4.62)$$

$$f_{III}^\theta = \rho_0 \frac{r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)^2} \frac{\partial t'_{III}}{\partial r} \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)^3 - \frac{d^2 \varphi_{III}}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)^2 \right]^2}$$

$$= \rho_0 \frac{r \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \frac{\partial t'_{III}}{\partial r} \left[a_2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^2} \quad (4.63)$$

donde $\frac{\partial t'_{III}}{\partial r}$ está dada por (4.55).

La tercera etapa del viaje transcurre para un observador situado en S' durante el intervalo $t'_3 \leq t' \leq t'_4$. La dinámica de la rotación de este fluido en este sistema de referencia durante esta etapa se obtiene con (3.21) y (4.62) e introduciendo (4.48) en (3.22)

$$f_{III}^{r'} = f_{III}^r = -\rho_0 r \frac{a_2 (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2}{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \quad (4.64)$$

$$f_{III}^{r\theta} = -\rho_3 \frac{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)_{t=t_3}^2 \right] \frac{d^2 \varphi_{III}}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)^2 \right]^2} = 0 \quad (4.65)$$

Reinversión temporal

La cuarta etapa del viaje temporal transcurre durante el intervalo $t_4 \leq t \leq t_6$ para un observador situado en S . La función $\varphi(t)$ más simple que origina una nueva inversión temporal es de la forma

$$\varphi_{IV}(t) = \varphi_{IV}(t_4) + \frac{1}{a_4} \left[a_4 (t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 \right]^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a_4} \left[a_4 (t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.66)$$

donde t_5 , a_4 y b_4 son constantes verificando

$$t_4 < t_5 < t_6; \quad b_4 > 0; \quad b_4 > -a_4 (t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} \quad (4.67)$$

La velocidad angular es⁽⁶⁾

$$\frac{d\varphi_{IV}}{dt} = \frac{1}{(t - t_5)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_4 (t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4} \quad (4.68)$$

La aceleración angular es

$$\frac{d^2 \varphi_{IV}}{dt^2} = - \frac{b_4}{3(t - t_5)^{\frac{4}{3}} \sqrt{a_4 (t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4}} \quad (4.69)$$

Las funciones $\varphi(t)$ y $\frac{d\varphi}{dt}$ deben ser continuas en $t = t_4$

$$\varphi_{IV}(t_4) = \varphi_{III}(t_4) \quad (4.70)$$

que con (4.46), (4.47) y (4.66) proporciona

⁽⁶⁾ Notar que la métrica (2.3) también es singular en $t = t_5$ en el sistema de referencia S , pero esto no es un problema como se verá a continuación.

$$\begin{aligned} \varphi_{IV}(t_4) = & \frac{a_1}{2}(t_1 - t_0)^2 - \frac{1}{a_2} \left[a_2(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{a_2} \left[a_2(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_2(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2} (t_4 - t_3) \end{aligned} \quad (4.71)$$

y

$$\left. \frac{d\varphi_{III}}{dt} \right|_{t=t_4} = \left. \frac{d\varphi_{IV}}{dt} \right|_{t=t_4} \quad (4.72)$$

Esta última ecuación con (4.45) y (4.68) lleva a

$$\frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_2(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2} = \frac{1}{(t_4 - t_5)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_4(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4} \quad (4.73)$$

Introduciendo (4.68) en (2.5)

$$\frac{\partial t'_{IV}}{\partial t} = \mp \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt} \right)^2} = \frac{1}{(t - t_5)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} \quad (4.74)$$

Se observa que $\frac{\partial t'_{IV}}{\partial t}$ cambia de signo cuando $t \geq t_5$ como se había comentado en (2.5).

Integrando (4.74) se obtiene $t'_{IV} = t'_{IV}(t, r)$

$$\begin{aligned} t'_{IV} = & t'_4 + \int_{t_4}^t \frac{1}{(t - t_5)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} dt \\ = & t'_4 + \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.75)$$

La continuidad de t' implica

$$t'_{IV}(t_4) = t'_{III}(t_4) \quad (4.76)$$

que con (4.75) da

$$t'_4 = t'_{III}(t_4) \quad (4.77)$$

Introduciendo (4.50) en $t = t_4$ en (4.77) y haciendo uso de (4.53) se obtiene

$$\begin{aligned} t'_4 = & t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ & - \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} (t_4 - t_3) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Introduciendo (4.78) en (4.75) se obtiene

$$\begin{aligned} t'_{IV} = & t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ & - \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2(t_4 - t_3)} + \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
 & - \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Para evitar divergencias en (4.79) conviene que

$$a_4 > 0 \tag{4.80}$$

La forma de la función (4.79) que alcanza un mínimo en $t = t_5$ permite revertir el retroceso temporal. En el instante $t = t_5$ de S se produce la reinversión temporal. De nuevo, este proceso sólo es posible si la densidad de fuerza externa (3.16) y (3.17) aplicada sobre este fluido en S y la densidad de fuerza externa (3.21) y (3.22) aplicada según S' son finitas.

Derivando (4.75), haciendo uso de (4.77) y de (4.55) en $t = t_4$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial t'_{IV}}{\partial r} &= \frac{t_1 - t_0}{2r} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} - \frac{1}{2a_1 r^2} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\
 & - \frac{a_2 r (1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + a_2 b_2 r^3 + 3b_2 r}{(1 + a_2 r^2)^2} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \\
 & + \frac{a_2 r (1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + a_2 b_2 r^3 + 3b_2 r}{(1 + a_2 r^2)^2} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \\
 & + \frac{a_2 r (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}} \sqrt{(1 + a_2 r^2)(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2}} (t_4 - t_3) \\
 & - \frac{a_4 r (1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + a_4 b_4 r^3 + 3b_4 r}{(1 + a_4 r^2)^2} \sqrt{(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} \\
 & + \frac{a_4 r (1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + a_4 b_4 r^3 + 3b_4 r}{(1 + a_4 r^2)^2} \sqrt{(1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} < 0
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

La densidad en el instante $t = t_4$ se obtiene a partir de (3.13), (4.61) y (4.44)

$$\rho_4 = \rho(t_4) = \frac{\rho_0}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{III}}{dt} \right)_{t=t_4}^2} \tag{4.82}$$

Introduciendo (4.68), (4.69) y (4.82) en (3.16) y (3.17) y haciendo uso de (4.72) se obtiene para este fluido en el sistema de referencia S durante la cuarta etapa del viaje temporal

$$f_{IV}^r = -\rho_0 r \frac{\left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt} \right)^2} = -\rho_0 r \frac{a_4 (t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4}{(1 + a_4 r^2)(t - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
 f_{IV}^\theta &= \rho_0 \frac{\mp r \sqrt{1+r^2 \left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt}\right)^2} \frac{\partial t'_{IV}}{\partial r} \left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt}\right)^3 - \frac{d^2\varphi_{IV}}{dt^2}}{\left[1+r^2 \left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt}\right)^2\right]^2} \\
 &= \rho_0 \frac{r \sqrt{(1+a_4 r^2)(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} \frac{\partial t'_{IV}}{\partial r} \left[a_4(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{b_4}{3\sqrt{a_4(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4}}}{\left[(1+a_4 r^2)(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2\right]^2} \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial t'_{IV}}{\partial r}$ viene dado por (4.81). Se observa que, a pesar de que la métrica (2.3) también es singular en $t = t_5$, tanto f_{IV}^r como f_{IV}^θ son finitas durante todo el intervalo. De nuevo se observa que la reinversión temporal es posible porque f_{IV}^θ depende del signo de $\frac{\partial t'_{IV}}{\partial t}$ porque $\frac{\partial t'_{IV}}{\partial r} < 0$.

La cuarta etapa del viaje transcurre para un observador situado en S' durante el intervalo $t'_4 \leq t' \leq t'_6$. La dinámica de la rotación de este fluido en este sistema de referencia durante esta etapa se obtiene con (3.21) y (4.83), introduciendo (4.68), (4.69) y (4.82) en (3.22) y teniendo en cuenta (4.72)

$$f_{IV}^{rr} = f_{IV}^r = -\rho_0 r \frac{a_4(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4}{(1+a_4 r^2)(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2} \quad (4.85)$$

$$f_{IV}^{\prime\theta} = -\rho_0 \frac{\frac{d^2\varphi_{IV}}{dt^2}}{\left[1+r^2 \left(\frac{d\varphi_{IV}}{dt}\right)^2\right]^2} = \frac{\rho_0 b_4}{3\sqrt{a_4(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4} \left[(1+a_4 r^2)(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2\right]^2} \quad (4.86)$$

Conviene expresar los resultados (4.85) y (4.86) en función del tiempo t' medido por S' . Para ello es necesario despejar t como función de t' de (4.75) obteniendo

$$(1+a_4 r^2)(t-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 = \left[(1+a_4 r^2)(t'-t'_4) + \left[(1+a_4 r^2)(t_4-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (4.87)$$

$$(t-t_5)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{1+a_4 r^2} \left[(1+a_4 r^2)(t'-t'_4) + \left[(1+a_4 r^2)(t_4-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{b_4 r^2}{1+a_4 r^2} \quad (4.88)$$

$$t = t_5 \pm \left\{ \frac{1}{1+a_4 r^2} \left[(1+a_4 r^2)(t'-t'_4) + \left[(1+a_4 r^2)(t_4-t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} - \frac{b_4 r^2}{1+a_4 r^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (4.89)$$

Introduciendo (4.87) y (4.88) en (4.85) y (4.86)

$$f_{IV}'' = -\rho_0 r \frac{a_4 \left[(1 + a_4 r^2)(t' - t'_4) + \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} + b_4}{\left[(1 + a_4 r^2) \left[(1 + a_4 r^2)(t' - t'_4) + \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{3}{3}} \right]^{\frac{2}{3}}} \quad (4.90)$$

$$f_{IV}'^{\theta} = \frac{\rho_0 b_4 \sqrt{1 + a_4 r^2}}{3 \sqrt{a_4 \left[(1 + a_4 r^2)(t' - t'_4) + \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} + b_4 \left[(1 + a_4 r^2)(t' - t'_4) + \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{3}{3}}}} \quad (4.91)$$

donde t'_4 está dado por (4.78). Se observa que tanto f_{IV}'' como $f_{IV}'^{\theta}$ son finitas en todo el intervalo.

Nuevamente, y al igual que sucedía en el instante $t = t_2$, se puede comprobar que en instante $t = t_5$ de S, el fluido vuelve a alcanzar la velocidad de la luz en S'. Esto sucede en S' en el instante t'_5 que se obtiene haciendo $t = t_5$ en (4.75)

$$t'_5 = t'_{IV}(t_5) = t'_4 + \frac{1}{1 + a_4 r^2} b_4^{\frac{3}{2}} r^3 - \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2)(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.92)$$

donde t'_4 está dado por (4.78).

Desaceleración temporal

La quinta etapa del viaje temporal transcurre durante el intervalo $t_6 \leq t \leq T$ para un observador situado en S. Si la rotación se detiene al final del viaje, en el instante $t = T$ de S, la función $\varphi(t)$ más simple es de la forma

$$\varphi_V(t) = \varphi_V(t_6) + \frac{a_5}{2} (t - T)^2 - \frac{a_5}{2} (t_6 - T)^2 \quad (4.93)$$

La velocidad angular es

$$\frac{d\varphi_V}{dt} = a_5(t - T) \quad (4.94)$$

que cuando se detiene en el instante final $t = T$ es cero

$$\left. \frac{d\varphi_V}{dt} \right|_{t=T} = 0 \quad (4.95)$$

La aceleración angular es

$$\frac{d^2\varphi_V}{dt^2} = a_5 \quad (4.96)$$

donde a_5 es una constante tal que

$$a_5 < 0 \quad (4.97)$$

Las funciones $\varphi(t)$ y $\frac{d\varphi}{dt}$ deben ser continuas en $t = t_6$

$$\varphi_V(t_6) = \varphi_{IV}(t_6) \quad (4.98)$$

que con (4.93), (4.66) y (4.71) lleva a

$$\begin{aligned} \varphi_V(t_6) = & \frac{a_1}{2}(t_1 - t_0)^2 - \frac{1}{a_2} \left[a_2(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{a_2} \left[a_2(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_2(t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2} (t_4 - t_3) + \frac{1}{a_4} \left[a_4(t_6 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & - \frac{1}{a_4} \left[a_4(t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\left. \frac{d\varphi_V}{dt} \right|_{t=t_6} = \left. \frac{d\varphi_{IV}}{dt} \right|_{t=t_6} \quad (4.100)$$

Esta última ecuación con (4.94) y (4.68) proporciona

$$a_5(t_6 - T) = \frac{1}{(t_6 - t_5)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{a_4(t_6 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4} \quad (4.101)$$

Insertando (4.94) en (2.5)

$$\frac{\partial t'_V}{\partial t} = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi_V}{dt} \right)^2} = \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2} \quad (4.102)$$

e integrando se obtiene la función $t'_V = t'_V(t, r)$

$$\begin{aligned} t'_V = t'_6 + & \int_{t_6}^t \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2} dt = t'_6 + \frac{t - T}{2} \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2} + \frac{1}{2a_5 r} \operatorname{Ln} \left[a_5 r (t - T) + \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2} \right] \\ & - \frac{t_6 - T}{2} \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t_6 - T)^2} - \frac{1}{2a_5 r} \operatorname{Ln} \left[a_5 r (t_6 - T) + \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t_6 - T)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.103)$$

La continuidad de t' implica

$$t'_V(t_6) = t'_{IV}(t_6) \quad (4.104)$$

que con (4.103) da

$$t'_6 = t'_{IV}(t_6) \quad (4.105)$$

Introduciendo (4.75) en $t = t_6$ en (4.105) y haciendo uso de (4.78) se obtiene

$$\begin{aligned} t'_6 = t'_0 + & \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ & - \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} (t_4 - t_3) + \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2) (t_6 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & - \frac{1}{1 + a_4 r^2} \left[(1 + a_4 r^2) (t_4 - t_5)^{\frac{2}{3}} + b_4 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.106)$$

La expresión anterior se simplifica si las constantes se escogen de manera que

$$\begin{aligned}
t_5 - t_4 &= t_3 - t_2 \\
t_6 - t_5 &= t_2 - t_1 \\
a_4 &= a_2 \\
b_4 &= b_2
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Introduciendo (4.107) en (4.106)

$$\begin{aligned}
t'_6 &= t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\
&- \frac{2}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
&+ \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} (t_4 - t_3)
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Sustituyendo (4.108) en (4.103) se obtiene

$$\begin{aligned}
t'_V &= t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r} \operatorname{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\
&- \frac{2}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1 + a_2 r^2} \left[(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
&+ \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} (t_4 - t_3) + \frac{t - T}{2} \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2} \\
&+ \frac{1}{2a_3 r} \operatorname{Ln} \left[a_3 r (t - T) + \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2} \right] - \frac{t_6 - T}{2} \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t_6 - T)^2} \\
&- \frac{1}{2a_5 r} \operatorname{Ln} \left[a_5 r (t_6 - T) + \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t_6 - T)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Conviene que el viaje finalice en un instante T' determinado del pasado de S' . Como $t' = t'(t, r)$ conviene fijar un r en el que esto suceda. Este será $r = r_0$ con lo que

$$t'_V(T)_{r_0} = T' \tag{4.110}$$

que con (4.109) da

$$\begin{aligned}
T' &= t'_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{2a_1 r_0} \operatorname{Ln} \left[a_1 r_0 (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\
&- \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} \left[(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} \left[(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
&+ \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2} (t_4 - t_3) - \frac{t_6 - T}{2} \sqrt{1 + a_5^2 r_0^2 (t_6 - T)^2} \\
&- \frac{1}{2a_5 r_0} \operatorname{Ln} \left[a_5 r_0 (t_6 - T) + \sqrt{1 + a_5^2 r_0^2 (t_6 - T)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.111}$$

expresión que se simplifica si las constantes se escogen de manera que

$$\begin{aligned} T - t_6 &= t_1 - t_0 \\ a_5 &= -a_1 \end{aligned} \quad (4.112)$$

Introduciendo (4.112) en (4.111)

$$\begin{aligned} T' &= t'_0 + (t_1 - t_0) \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{a_1 r_0} \operatorname{Ln} \left[a_1 r_0 (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ &- \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} \left[(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} \left[(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ &+ \frac{1}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2} (t_4 - t_3) \end{aligned} \quad (4.113)$$

que con (4.58) y (4.59) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} T' &= t'_0 + (t_1 - t_0) \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{a_1 r_0} \operatorname{Ln} \left[a_1 r_0 (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ &- \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} k^3 (t_3 - t_2) + \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} \left[(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} - k (t_4 - t_3) \end{aligned} \quad (4.114)$$

Conviene introducir un nuevo parámetro δ definido por la ecuación

$$a_1 r_0 (t_1 - t_0) = \delta \quad (4.115)$$

Resumiendo, las condiciones de contorno (4.21) y (4.60) y las ecuaciones (4.107), (4.112), (4.114) y (4.115) proporcionan diez ecuaciones independientes

$$a_1 = \frac{1}{t_1 - t_0} \sqrt{a_2 + \frac{b_2}{(t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}}}}; \quad t_3 = t_2 + \left(\frac{b_2 r_0^2}{k^2 - 1 - a_2 r_0^2} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad t_5 - t_4 = t_3 - t_2;$$

$$t_6 - t_5 = t_2 - t_1; \quad a_4 = a_2; \quad b_4 = b_2; \quad T - t_6 = t_1 - t_0; \quad a_5 = -a_1;$$

$$a_1 r_0 (t_1 - t_0) = \delta$$

$$\begin{aligned} T' &= t'_0 + (t_1 - t_0) \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} + \frac{1}{a_1 r_0} \operatorname{Ln} \left[a_1 r_0 (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r_0^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ &- \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} k^3 (t_3 - t_2) + \frac{2}{1 + a_2 r_0^2} \left[(1 + a_2 r_0^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} - k (t_4 - t_3) \end{aligned} \quad (4.116)$$

porque las ecuaciones (4.73) y (4.101) se satisfacen idénticamente. Además hay 13 incógnitas lo cual deja tres parámetros libres, por ejemplo a_2 , b_2 y δ . Las incógnitas serán funciones de k , r_0 , t_0 , t'_0 , T y T' que son conocidos, además de los parámetros libres a_2 , b_2 y δ .

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$t_1 = t_0 + \frac{kT - t'_0 + T' - kt_0 - 2k \left(1 - \frac{k^2}{1 + a_2 r_0^2} \right) \left(\frac{b_2 r_0^2}{k^2 - 1 - a_2 r_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{1 + \delta^2}{1 + a_2 r_0^2} + k \right) \left(\frac{b_2 r_0^2}{\delta^2 - a_2 r_0^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{2k + \sqrt{1 + \delta^2} + \frac{1}{\delta} \operatorname{Ln}(\delta + \sqrt{1 + \delta^2})} \quad (4.117)$$

$$t_2 = t_0 + \frac{kT - t'_0 + T' - kt_0 - 2k \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})} + \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.118)$$

$$t_3 = t_0 + \frac{kT - t'_0 + T' - kt_0 - 2k \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})} + \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.119)$$

$$t_4 = t_0 + \frac{t'_0 - T'}{k} + \left(1 - \frac{2k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{k} \left[\frac{2(1+\delta^2)}{1+a_2r_0^2} + k\right] \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{T - \frac{t'_0 - T'}{k} - t_0 - 2 \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{k} \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})} \left[k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})\right] \quad (4.120)$$

$$t_5 = t_0 + \frac{t'_0 - T'}{k} + 2 \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{k} \left[\frac{2(1+\delta^2)}{1+a_2r_0^2} + k\right] \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{T - \frac{t'_0 - T'}{k} - t_0 - 2 \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{k} \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})} \left[k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})\right] \quad (4.121)$$

$$t_6 = t_0 + \frac{t'_0 - T'}{k} + 2 \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{k} \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{T - \frac{t'_0 - T'}{k} - t_0 - 2 \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{k} \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})} \left[k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})\right] \quad (4.122)$$

$$a_1 = \frac{\delta}{r_0} \frac{2k + \sqrt{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta} \text{Ln}(\delta + \sqrt{1+\delta^2})}{kT - t'_0 + T' - kt_0 - 2k \left(1 - \frac{k^2}{1+a_2r_0^2}\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{k^2-1-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{1+\delta^2}{1+a_2r_0^2} + k\right) \left(\frac{b_2r_0^2}{\delta^2-a_2r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -a_5 \quad (4.123)$$

Derivando (4.103) y haciendo uso de (4.105), (4.81) en $t = t_6$, (4.107) y (4.112)

$$\frac{\partial t'_V}{\partial r} = \frac{t_1 - t_0}{r} \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} - \frac{1}{a_1 r^2} \text{Ln} \left[a_1 r (t_1 - t_0) + \sqrt{1 + a_1^2 r^2 (t_1 - t_0)^2} \right] \\ - 2 \left[\frac{a_2 r (1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + a_2 b_2 r^3 + 3b_2 r}{(1 + a_2 r^2)^2} \right] \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \\ + 2 \left[\frac{a_2 r (1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + a_2 b_2 r^3 + 3b_2 r}{(1 + a_2 r^2)^2} \right] \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_1)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2} \\ + \frac{a_2 r (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r}{(t_2 - t_3)^{\frac{1}{3}} \sqrt{(1 + a_2 r^2) (t_2 - t_3)^{\frac{2}{3}} + b_2 r^2}} (t_4 - t_3) + \frac{t - T}{2r} \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t - T)^2}$$

$$-\frac{1}{2a_5 r^2} \text{Ln} \left[a_5 r(t-T) + \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t-T)^2} \right] \quad (4.124)$$

La densidad en el instante $t = t_6$ se obtiene a partir de (3.13), (4.82) y (4.72)

$$\rho_6 = \rho(t_6) = \frac{\rho_0}{1 + r^2 \left(\frac{d\phi_{IV}}{dt} \right)_{t=t_6}^2} \quad (4.125)$$

Introduciendo (4.94), (4.96) y (4.125) en (3.16) y (3.17) y haciendo uso de (4.100) se obtiene para este fluido en el sistema de referencia S durante la quinta etapa del viaje temporal

$$f_V^r = -\rho_0 r \frac{\left(\frac{d\phi_V}{dt} \right)^2}{1 + r^2 \left(\frac{d\phi_V}{dt} \right)^2} = -\frac{\rho_0 a_5^2 r (t-T)^2}{1 + a_5^2 r^2 (t-T)^2} \quad (4.126)$$

$$f_V^\theta = \rho_0 \frac{r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\phi_V}{dt} \right)^2} \frac{\partial t'_V}{\partial r} \left(\frac{d\phi_V}{dt} \right)^3 - \frac{d^2 \phi_V}{dt^2}}{\left[1 + r^2 \left(\frac{d\phi_V}{dt} \right)^2 \right]^2} = \rho_0 \frac{r \sqrt{1 + a_5^2 r^2 (t-T)^2} \frac{\partial t'_V}{\partial r} a_5^3 (t-T)^3 - a_5}{\left[1 + a_5^2 r^2 (t-T)^2 \right]^2} \quad (4.127)$$

donde $\frac{\partial t'_V}{\partial r}$ está dada por (4.124).

La quinta etapa del viaje transcurre para un observador situado en S' durante el intervalo $t'_6 \leq t' \leq T'$. La dinámica de la rotación de este fluido en este sistema de referencia durante esta etapa se obtiene introduciendo (4.94) y (4.96) con (3.28) en (3.29) y (3.30)

$$f_V^{rr} \approx -\rho_0 a_5^2 r (t' - T - t'_6 + t_6)^2 \quad (4.128)$$

$$f_V^{\prime\theta} = -\rho_0 a_5 \quad (4.129)$$

expresiones que resultan válidas si se verifica (3.25) que en este caso se satisface gracias a (4.112) y (4.13)

$$r \frac{d\phi_V}{dt} = a_5 r (t-T) < a_5 r (t_6 - T) = a_1 r (t_1 - t_0) \ll 1 \quad (4.130)$$

Y con esto concluye el viaje al pasado.

Como es fácil de imaginar el viaje del regreso al momento presente se puede efectuar de manera similar y en sólo tres etapas que no entrañan tanta dificultad como los viajes al pasado.

Finalmente, señalar que el viaje al pasado puede usarse para reducir la duración de los viajes interestelares. En efecto, debido al efecto de dilatación temporal, si un viajero alcanza una velocidad próxima a la de la luz podría llegar en unos pocos meses a su estrella de destino. Sin embargo cuando regresara de su viaje, notaría que en la Tierra han pasado cientos o tal vez miles de años. Si el viajero retrocediera en el tiempo podría hacer que la duración del viaje fuera la misma para él y para los habitantes de la Tierra.

APENDICE: ECUACIONES DE EINSTEIN CON CAMPO ESCALAR

Los resultados anteriores resultan adecuados en un espacio-tiempo plano en ausencia de gravedad. En la práctica esto sucede cuando el Campo Gravitatorio creado por el propio fluido es tan pequeño que apenas curva el espacio-tiempo. Aunque no es relevante en los desarrollos expuestos, resulta conveniente generalizar el formalismo al caso en que el Campo Gravitatorio generado por el fluido sea importante. Los resultados en ausencia de gravedad se obtienen como caso particular. Para ello hay que recurrir a las ecuaciones de Einstein del Campo Gravitatorio.

En primer lugar, conviene notar que el tensor energía-momento (1.11) no se conserva, como se deduce de (1.9), por lo que no encaja en las ecuaciones de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -8\pi G T^{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

en las que el tensor energía-momento se conserva

$$T^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Esto significa que el tensor energía-momento (1.11) no es adecuado para calcular el Campo Gravitatorio creado por un fluido perfecto sometido a fuerzas externas no gravitatorias.

La manera más simple de evitar esta dificultad consiste en introducir un campo escalar ϕ en las ecuaciones de Einstein (A.1).

Este campo escalar tiene que verificar una nueva ecuación diferencial. La ecuación diferencial más simple que es generalmente covariante para un campo escalar es

$$\phi_{;\alpha}{}^{\alpha} = 4\pi\lambda T_{M\alpha}^{\alpha} \quad (\text{A.3})$$

donde λ es una constante de acoplamiento y $T_M^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la materia.

El tensor simétrico energía-momento más general para este campo debe contener derivadas segundas y productos de primeras derivadas del campo ϕ

$$T_{\phi}^{\mu\nu} = A(x)\phi_{;\mu}{}^{\mu}\phi_{;\nu}{}^{\nu} + B(x)g^{\mu\nu}\phi_{;\alpha}{}^{\alpha}\phi_{;\alpha}{}^{\alpha} + C(x)\phi_{;\mu}{}^{\mu}\phi_{;\nu}{}^{\nu} + D(x)g^{\mu\nu}\phi_{;\alpha}{}^{\alpha} \quad (\text{A.4})$$

Las ecuaciones de Einstein (A.1) incluyendo este campo escalar son

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -8\pi G (T_M^{\mu\nu} + T_{\phi}^{\mu\nu}) \quad (\text{A.5})$$

donde $T_M^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la materia que para un fluido perfecto viene dado por (1.11) y $T_{\phi}^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento del campo escalar (A.4).

Para determinar las funciones $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$ que aparecen en (A.4), hay que calcular la derivada covariante de la ecuación (A.5)

$$\left(R^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} R \right)_{;\alpha} = -8\pi G (T_{M;\alpha}^{\mu\alpha} + T_{\phi;\alpha}^{\mu\alpha}) \quad (\text{A.6})$$

Las identidades de Bianchi aseguran que el primer término de la ecuación (A.6) se anula

$$\left(R^{\mu\alpha} - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} R \right)_{;\alpha} = 0 \quad (\text{A.7})$$

lo que equivale según (A.6) a

$$T_{M;\alpha}^{\mu\alpha} = -T_{\phi;\alpha}^{\mu\alpha} \quad (\text{A.8})$$

Esta última ecuación garantiza que el tensor energía-momento total definido como

$$T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + T_{\phi}^{\mu\nu} \quad (\text{A.9})$$

se conserve, como se pretendía.

Como se refleja en la ecuación (1.9) el primer término de (A.8) es la densidad de fuerza externa f^{μ}

$$f^{\mu} = T_{M;\alpha}^{\mu\alpha} \quad (\text{A.10})$$

que con (A.8) proporciona

$$f^{\mu} = -T_{\phi;\alpha}^{\mu\alpha} \quad (\text{A.11})$$

La derivada covariante de (A.4) es

$$\begin{aligned} T_{\phi;\gamma}^{\mu\nu} &= \frac{\partial A}{\partial x^{\alpha}} \phi_{;\alpha}^{\mu} \phi_{;\alpha}^{\nu} + [A(x) + 2B(x)] \phi_{;\alpha}^{\mu;\alpha} \phi_{;\alpha}^{\nu} + A(x) \phi_{;\alpha}^{\mu} \phi_{;\alpha;\alpha}^{\nu} + \frac{\partial B}{\partial x^{\beta}} g^{\mu\beta} \phi_{;\alpha}^{\nu} \phi_{;\alpha} \\ &+ \frac{\partial C}{\partial x^{\alpha}} \phi_{;\alpha}^{\mu;\alpha} + C(x) \phi_{;\alpha;\alpha}^{\mu;\alpha} + \frac{\partial D}{\partial x^{\beta}} g^{\mu\beta} \phi_{;\alpha;\alpha}^{\nu} + D(x) \phi_{;\alpha;\alpha}^{\mu;\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde se ha usado

$$\phi_{;\alpha}^{\mu;\alpha} = \phi_{;\alpha}^{\alpha;\mu} \quad (\text{A.13})$$

Introduciendo (A.12) en (A.11) se obtiene

$$\begin{aligned} f^{\mu} &= -\frac{\partial A}{\partial x^{\alpha}} \phi_{;\alpha}^{\mu} \phi_{;\alpha}^{\alpha} - [A(x) + 2B(x)] \phi_{;\alpha}^{\mu;\alpha} \phi_{;\alpha}^{\alpha} - A(x) \phi_{;\alpha}^{\mu} \phi_{;\alpha;\alpha}^{\alpha} - \frac{\partial B}{\partial x^{\beta}} g^{\mu\beta} \phi_{;\alpha}^{\alpha} \phi_{;\alpha} \\ &- \frac{\partial C}{\partial x^{\alpha}} \phi_{;\alpha}^{\mu;\alpha} - C(x) \phi_{;\alpha;\alpha}^{\mu;\alpha} - \frac{\partial D}{\partial x^{\beta}} g^{\mu\beta} \phi_{;\alpha;\alpha}^{\alpha} - D(x) \phi_{;\alpha;\alpha}^{\mu;\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Estas son las ecuaciones de la dinámica del campo escalar que determinan las cuatro funciones $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$.

Sistemas de referencia

Las diez ecuaciones (A.5) que determinan el Campo Gravitatorio no son independientes sino que están relacionadas por las cuatro identidades de Bianchi (A.7) lo que reduce las ecuaciones (A.5) a seis ecuaciones independientes. Para determinar la métrica unívocamente hacen falta cuatro ecuaciones más que fijen el Gauge, esto es, el sistema de referencia.

En presencia de gravedad también conviene definir un sistema de referencia en reposo S' como el descrito en la sección I. Como las ecuaciones (1.9) también son aplicables en el caso de la gravedad, entonces en el sistema de referencia S' las ecuaciones de la dinámica del fluido son

$$f'^{\mu} = T_{M;\alpha}^{\mu\alpha} = \frac{\partial T_M^{\mu\alpha}}{\partial x'^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_M^{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_M^{\alpha\beta\mu} \quad (\text{A.15})$$

donde

$$T_M^{\mu\nu} = p g'^{\mu\nu} + (p + \rho) \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \quad (\text{A.16})$$

es el tensor energía-momento del fluido como en (1.11) y

$$d\tau^2 = -g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \quad (\text{A.17})$$

La conexión afín, en función de la métrica en S' se obtiene como en (1.26)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g'^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \right) \quad (\text{A.18})$$

En este caso la métrica $g'_{\mu\nu}$ satisface las ecuaciones de Einstein (A.5)

$$R'^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g'^{\mu\nu} R' = -8\pi G (T_M'^{\mu\nu} + T_{\phi}'^{\mu\nu}) \quad (\text{A.19})$$

Claramente, en presencia de gravedad, la métrica $g'_{\mu\nu}$ es distinta de la métrica de Minkowski (1.1) y el tensor de curvatura (1.27) ya no es cero, por lo que el espacio-tiempo es curvo y el campo tiene fuentes.

Ahora bien, en presencia de gravedad y por similitud con (1.2), se puede definir el sistema de referencia en reposo S' como aquél en el que las ecuaciones de la dinámica del fluido adquieren la forma

$$f'^{\mu} = T_M'^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{\partial T_M'^{\mu\alpha}}{\partial x'^{\alpha}} \quad (\text{A.20})$$

Esto equivale, a la vista de las ecuaciones (A.15), que son válidas en cualquier sistema de referencia y en particular en el S' , a escoger un gauge en el que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} T_M'^{\mu\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_M'^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Estas cuatro ecuaciones que determinan el Gauge, esto es, el sistema de referencia S' , no son covariantes por lo que no resultan válidas en cualquier sistema de referencia sino sólo en el S' en particular.

El sistema de referencia en movimiento S se escoge, al igual que en la sección I, de manera que el fluido, que origina el campo gravitatorio, se encuentre en reposo respecto a él. De igual manera, las ecuaciones de la dinámica del fluido en el sistema de referencia S son

$$f^{\mu} = T_M^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{\partial T_M^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} T_M^{\mu\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T_M^{\alpha\beta} \quad (\text{A.22})$$

donde

$$T_M^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (\text{A.23})$$

y

$$d\tau^2 = -g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = -g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} dx^{\delta} dx^{\gamma} = -g_{\delta\gamma} dx^{\delta} dx^{\gamma} \quad (\text{A.24})$$

es la ecuación de invariabilidad del intervalo de la que se deduce la relación entre la métrica en S y S'

$$g_{\mu\nu} = g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = g_{\nu\mu} \quad (\text{A.25})$$

De nuevo, la conexión afín en función de la métrica en S se obtiene como en (1.26)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (\text{A.26})$$

La métrica $g_{\mu\nu}$ en S también satisface las ecuaciones de Einstein (A.5)

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -8\pi G (T_M^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu}) \quad (\text{A.27})$$

Si el fluido se encuentra en reposo respecto a $S^{(7)}$, se verifican las tres ecuaciones (1.17)

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.28})$$

Además, para fijar totalmente el sistema de referencia S , hace falta añadir otra condición que se puede obtener por similitud con (1.18) imponiendo que la componente temporal pura de la métrica debe ser la misma en cualquier sistema de referencia

$$g_{tt} = g'_{tt} \quad (\text{A.29})$$

donde g'_{tt} es la componente temporal pura de la métrica en el sistema de referencia S' en reposo.

Las tres ecuaciones (A.28) junto con la ecuación (A.29) fijan otro Gauge, esto es, el sistema de referencia S .

Grados de libertad

Además, se ha de verificar la ecuación de continuidad del fluido, que cuando se conserva la masa-energía en S' adopta la forma

$$T_M^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Esta ecuación tampoco es covariante por lo que sólo resulta válida en el sistema de referencia S' .

De manera general y en cualquier sistema de referencia, las seis ecuaciones independientes de Einstein con campo escalar, las cuatro ecuaciones que fijan el sistema de referencia, las cuatro ecuaciones de la dinámica del fluido, las cuatro ecuaciones de la dinámica del campo escalar, la ecuación de invariabilidad del intervalo, la ecuación de estado, la ecuación que verifica el campo escalar ϕ y la ecuación de continuidad del fluido forman un sistema de 22 ecuaciones con 25 variables ó incógnitas: las diez componentes del tensor métrico, las cuatro componentes de la densidad de fuerza externa aplicada, las cuatro componentes de la velocidad generalizada del fluido, las cuatro funciones $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$, la presión y la densidad del fluido y el campo escalar. Esto deja $25 - 22 = 3$ grados de libertad como corresponde a un fluido perfecto en movimiento.

En la práctica, puede convenir, como en la sección I, que las transformaciones de coordenadas aparezcan de manera explícita en las ecuaciones (A.22) de la dinámica del fluido en S . Para ello se obtiene la conexión afín (A.26) que aparece en las ecuaciones (A.22) en función de la métrica $g'_{\mu\nu}$ en S' a través de (A.25).

En este caso las seis ecuaciones independientes de Einstein (A.19), las cuatro ecuaciones (A.21) que fijan el sistema de referencia S' , las cuatro ecuaciones de la dinámica (A.22), las cuatro ecuaciones de la dinámica del campo escalar (A.14), las tres ecuaciones (A.28) junto con la ecuación (A.29), la ecuación de invariabilidad del intervalo (A.24), la ecuación de estado (1.16), la ecuación (A.3) que verifica el campo escalar ϕ y la ecuación de continuidad (A.30) forman un sistema de 26 ecuaciones con

⁽⁷⁾ Es posible encontrar un sistema de referencia como este porque las fuerzas externas pueden aplicarse de manera que todas las partículas del fluido se encuentren en reposo.

29 variables ó incógnitas: las diez componentes del tensor métrico $g'_{\mu\nu}$, las cuatro componentes de la densidad de fuerza externa aplicada f^μ , las cuatro componentes de la velocidad generalizada del fluido $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, las cuatro funciones $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$, las cuatro funciones que relacionan las coordenadas en uno y otro sistema de referencia $x'^{\mu} = x'^{\mu}(\mathbf{x})$, la presión p y la densidad ρ del fluido y el campo escalar ϕ . Esto deja de nuevo $29 - 26 = 3$ grados de libertad.

Estos tres grados de libertad permiten escoger, por ejemplo, las funciones que relacionan las coordenadas espaciales en uno y otro sistema de referencia como variables independientes. El resto de variables dinámicas se expresarán como funciones de ellas.

Relevancia del campo escalar ϕ

La introducción del campo escalar ϕ permite obtener la métrica de Minkowski (1.1) como solución de las ecuaciones de Einstein (A.19) en el Gauge (A.21). Esta solución resulta adecuada en ausencia de gravedad. En la práctica esto sucede cuando el Campo Gravitatorio creado por el fluido es tan pequeño que apenas curva el espacio-tiempo. En esta situación, en cualquier sistema de referencia

$$R^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.31})$$

y el escalar de curvatura

$$R = g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.32})$$

Con (A.31) y (A.32) y (A.5) se puede comprobar que para este fluido se verifica que

$$T_M^{\mu\nu} = -T_\phi^{\mu\nu} \quad (\text{A.33})$$

por lo que el campo ϕ es especialmente importante.

En el vacío

$$T_M^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.34})$$

y la ecuación (A.3) se escribirá

$$\phi_{;\alpha}^\alpha = 0 \quad (\text{A.35})$$

mientras que la ecuación (A.10) proporciona

$$f^\mu = 0 \quad (\text{A.36})$$

Introduciendo (A.35) y (A.36) en (A.14) se obtiene

$$0 = \frac{\partial A}{\partial x^\alpha} \phi_{;\alpha}^\mu \phi_{;\alpha}^\alpha + [A(x) + 2B(x)] \phi_{;\alpha}^\mu \phi_{;\alpha}^\alpha + \frac{\partial B}{\partial x^\beta} g^{\mu\beta} \phi_{;\alpha}^\alpha \phi_{;\alpha}^\alpha + \frac{\partial C}{\partial x^\alpha} \phi_{;\alpha}^\mu \phi_{;\alpha}^\alpha + C(x) \phi_{;\alpha;\alpha}^\mu \quad (\text{A.37})$$

Estas ecuaciones tienen como solución

$$A(x) = B(x) = C(x) = 0 \quad (\text{A.38})$$

Con (A.35) y (A.38) el tensor energía-momento (A.4) del campo escalar ϕ en el vacío es

$$T_\phi^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.39})$$

Las ecuaciones (A.34) y (A.39) implican que en el vacío las ecuaciones (A.1) y (A.5) tienen las mismas soluciones, es decir, en este caso el campo escalar no altera las

soluciones de las ecuaciones (A.1) que explican, entre otros fenómenos, la dinámica planetaria.

En otros casos habrá que determinar su trascendencia.

CONCLUSIONES

Los desarrollos expuestos demuestran la posibilidad teórica de efectuar viajes al pasado, en el caso de un fluido perfecto macroscópico sin presión, en ausencia de gravedad y sin violar las leyes de la Relatividad Especial. Esto sólo es posible si se acelera el fluido hasta alcanzar la velocidad de la luz. Para demostrarlo se ha efectuado un tratamiento relativista de la rotación utilizando el principio de Covarianza General, que se ha mostrado ciertamente práctico. Finalmente se ha justificado la necesidad de introducir un campo escalar en las ecuaciones de Einstein para explicar satisfactoriamente la dinámica relativista. Estas ecuaciones han permitido generalizar el formalismo al caso en el que el fluido genere un Campo Gravitatorio apreciable.

Y para terminar, sólo añadir esta frase: “el tiempo dará ó quitará razones”.

BIBLIOGRAFIA

S. Weinberg: “Gravitation and Cosmology”, Wiley, New York, 1972, Cap. 2 al 7.

REFERENCIAS

[1] A.P. French, Special Relativity, Massachusets Institute of Technology, 1968, p. 71